

Fiche d'exercices numéro 1.

Exercice 1. Etudier les séries numériques de termes généraux suivants :

1. $a_n = \frac{1}{2^n}$

2. $b_n = 3^n$,

3. $c_n = \left(\frac{n+1}{n^2+2n-1} \right)^n$.

Exercice 2.

On admet que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge et celle de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. En utilisant ces deux résultats, étudier la nature des séries de terme généraux :

1. $a_n = \frac{1}{n^2}$

3. $c_n = \frac{n+1}{n^3+3n+1}$,

2. $b_n = \frac{n}{(n+1)^2}$,

4. $d_n = \frac{2}{n^3}$.

Exercice 3. Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{1}{n+1}, b_n = \frac{1}{n^2+1}, c_n = \frac{1}{n(n+1)}, d_n = \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Exercice 4. (Critère de Leibniz) Rappeler le critère de Leibniz pour les séries alternées puis étudier la nature des séries suivantes :

1. $a_n = (-1)^n n^2$,

3. $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

2. $b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$,

4. $d_n = \frac{(-1)^n (n+2)^2}{n^3+2n-3}$.

Exercice 5. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

2. Etablir que lorsque n tend vers $+\infty$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

3. Etudier la convergence de la série de terme général u_n .

4. Qu'à-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 6. Soit $a \in]0, +\infty[$, on considère la série de terme général $u_n = \frac{(1+i)^n}{(n^2+1)a^n}$.
Montrer que $\{u_n\}$ converge absolument si et seulement si $a \geq \sqrt{2}$.

Exercice 7.

1. Justifier que la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$ est convergente.
2. Montrer que la série de terme général $\frac{\sin n}{n}$ ne converge pas absolument.
On pourra utiliser le fait que $|\sin n| \geq \sin^2 n = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$

Exercice 8. (Calcul des sommes) Prouver la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$. On pourra utiliser l'égalité $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + n + 1}$.
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$.

Exercice 9. Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$.
3. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$.

Exercice 10. (Pour aller un peu plus loin) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs pour laquelle il existe $\alpha > 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha.$$

Montrer que $\sum u_n$ converge.

Application : $u_n = \frac{1.3.....2n-1}{2.4.....2n.2n+1}$.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite décroissante à termes positifs. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.

Exercice 12. Soit $\alpha \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ et $\sum u_n, n \geq 1$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 13. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 14.

1. Enoncer le l'inégalité des accroissements finis pour une fonction f .
2. Montrer que pour tout $x, y > 0$, $0 \leq |\arctan(x+y) - \arctan x| \leq \frac{y}{1+x^2}$.

3. Pour $a > 0$, étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \arctan(n + a) - \arctan n$.

Exercice 15. (Cas limite de la règle de d'Alembert)

1. Soit, pour un entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.
- Quelle est la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?
 - Montrer que la suite nu_n est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.
- Quelle est la limite de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$?
 - Montrer que, si $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général v_n converge.